

Université de Tunis (Faculté des Sciences Humaines et Sociales)

29-30 Novembre 2013

Colloque International

Le carré et ses extensions: Aspects théoriques, pratiques et historiques

La logique géométrique du dodécaèdre rhombique des oppositions

Hans Smessaert

(Groupe de Recherche en Linguistique Formelle et Computationnelle, KU Leuven, Belgique)

en collaboration avec Lorenz Demey

(Centre de Logique et Philosophie Analytique, KU Leuven, Belgique)

Structure de la conférence

1. Introduction

- 1.1 Chaînes de bits (CB) et Paires de Contradictaires (PCD)
- 1.2 Relations Aristotéliennes entre chaînes de bits

2. Les carrés Aristotéliens des Oppositions

3. Les hexagones Aristotéliens des Oppositions

- 3.1 Les hexagones Sesmat-Blanché et Sherwood-Czezowski
- 3.2 Les hexagones (partiellement) dégénérés
- 3.3 Tableau sommaire des hexagones

4. Les octogones Aristotéliens des Oppositions

- 4.1 L'octogone de Moretti-Pellissier
- 4.2 L'octogone de Béziau
- 4.3 L'octogone de Buridan
- 4.4 Tableau sommaire des octogones

5. Représentation visuelle à trois dimensions

- 5.1 Le dodécaèdre rhombique des oppositions
- 5.2 Les carrés Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique
- 5.3 Les hexagones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique
- 5.4 Les octogones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique
- 5.5 La complémentarité entre l'hexagone SB fort et le rhombicube

6. Conclusions et perspectives

1. Introduction

1.1 Chaînes de bits (CB) et Paires de Contradictaires (PCD)

Forme Normale Disjonctive: les formules du Calcul des Propositions

$$\left[\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \varphi \wedge \neg\psi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg\varphi \wedge \psi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ 1/0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg(\varphi \leftarrow \psi) \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg(\varphi \vee \psi) \\ 1/0 \end{array} \right]$$

Forme Normale Disjonctive: les formules de S5

$$\left[\begin{array}{c} \Box\varphi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg\Box\varphi \wedge \varphi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \Diamond\varphi \wedge \neg\varphi \\ 1/0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{c} \neg\Diamond\varphi \\ 1/0 \end{array} \right]$$

Paires de Contradictaires type C (PCD/C) = CB niveau 1 + CB niveau 3

S5	Calc.Prop.	CB N1	CB N3	Calc.Prop.	S5
$\Box\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	1000	0111	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\Box\varphi$
$\neg\Box\varphi \wedge \varphi$	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	0100	1011	$\varphi \rightarrow \psi$	$\Box\varphi \vee \neg\varphi$
$\Diamond\varphi \wedge \neg\varphi$	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	0010	1101	$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\neg\Diamond\varphi \vee \varphi$
$\neg\Diamond\varphi$	$\neg(\varphi \vee \psi)$	0001	1110	$\varphi \vee \psi$	$\Diamond\varphi$

Paires de Contradictaires type O (PCD/O) = CB niveau 2 + CB niveau 2

S5	Calc.Prop.	CB N2	CB N2	Calc.Prop.	S5
φ	φ	1100	0011	$\neg\varphi$	$\neg\varphi$
$\Box\varphi \vee (\Diamond\varphi \wedge \neg\varphi)$	ψ	1010	0101	$\neg\psi$	$\neg\Diamond\varphi \vee (\neg\Box\varphi \wedge \varphi)$
$\Box\varphi \vee \neg\Diamond\varphi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$	1001	0110	$\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\neg\Box\varphi \wedge \Diamond\varphi$
$\Box\varphi \wedge \neg\Box\varphi$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	0000	1111	$\varphi \vee \neg\varphi$	$\Box\varphi \vee \neg\Box\varphi$

1.2 Relations Aristotéliennes entre chaînes de bits

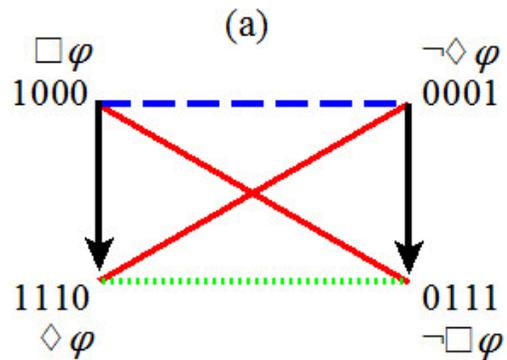
Conjonction (meet) et disjonction (join) entre chaînes de bits

<u>CBα</u>	1 0 1 0		<u>CBα</u>	1 0 1 0
<u>CBβ</u>	1 1 0 0		<u>CBβ</u>	1 1 0 0
	-----			-----
<u>$\alpha \wedge \beta$</u>	1 0 0 0		<u>$\alpha \vee \beta$</u>	1 1 1 0

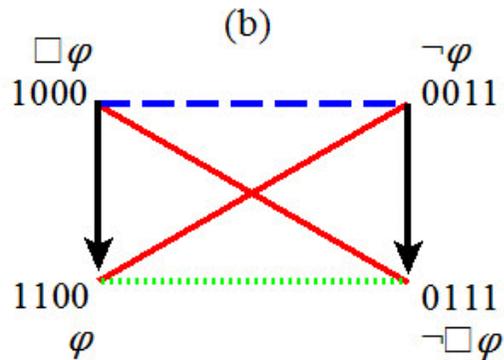
Les relations Aristotéliennes d'Opposition entre chaînes de bits

CONTRADICTOIRE (<u>α, β</u>)	\equiv	[<u>$\alpha \wedge \beta = 0000$</u>] & [<u>$\alpha \vee \beta = 1111$</u>]
CONTRAIRE (<u>α, β</u>)	\equiv	[<u>$\alpha \wedge \beta = 0000$</u>] & [<u>$\alpha \vee \beta \neq 1111$</u>]
SUBCONTRAIRE (<u>α, β</u>)	\equiv	[<u>$\alpha \wedge \beta \neq 0000$</u>] & [<u>$\alpha \vee \beta = 1111$</u>]
SUBALTERNE (<u>α, β</u>)	\equiv	[<u>$\alpha \wedge \beta = \alpha$</u>] & [<u>$\alpha \vee \beta = \beta$</u>]

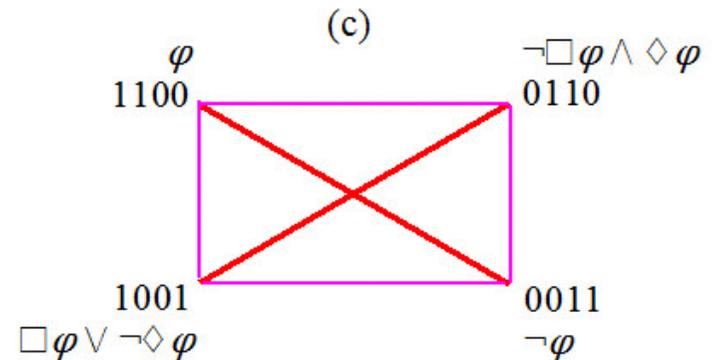
2. Les carrés Aristotéliens des Oppositions



carré classique
 balancé
 2 PCD/C



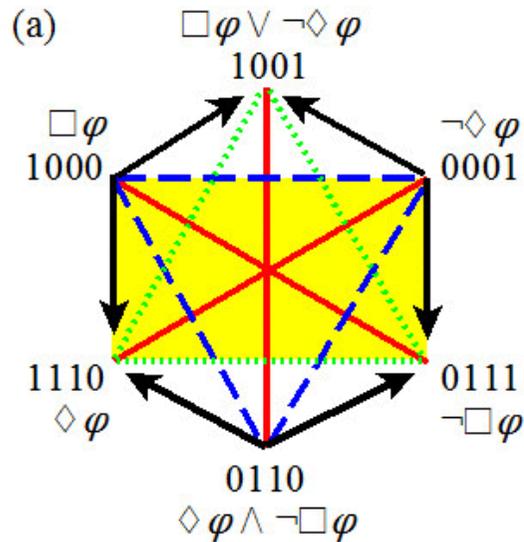
carré classique
 non-balancé
 1 PCD/C + 1 PCD/O



carré dégénéré
 balancé
 2 PCD/O

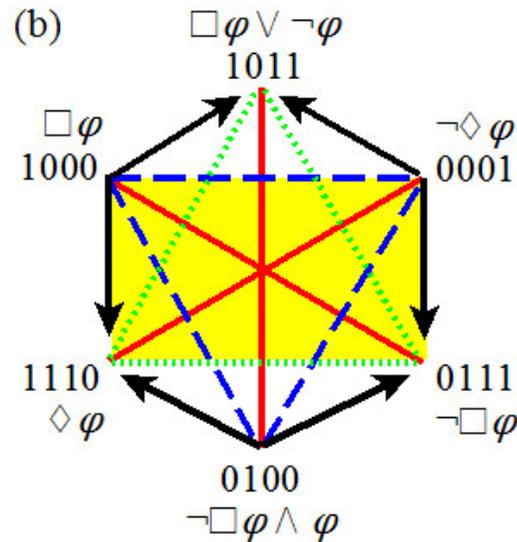
3. Les hexagones Aristotéliens des Oppositions

3.1 Les hexagones Sesmat-Blanché et Sherwood-Czezowski



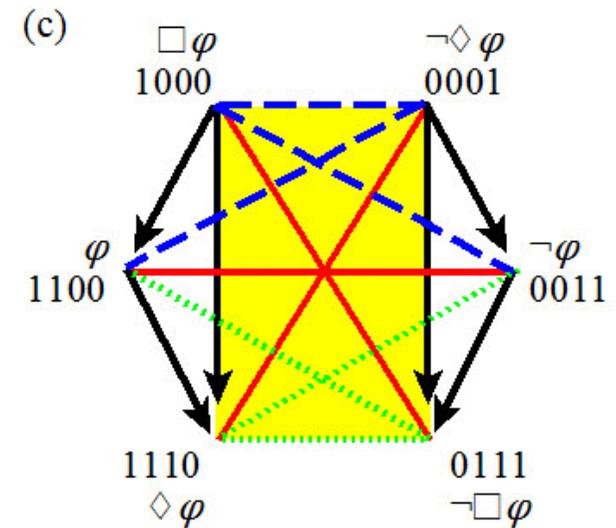
Sesmat-Blanché fort

2 PCD/C + 1 PCD/O



Sesmat-Blanché faible
Moretti & Pellissier

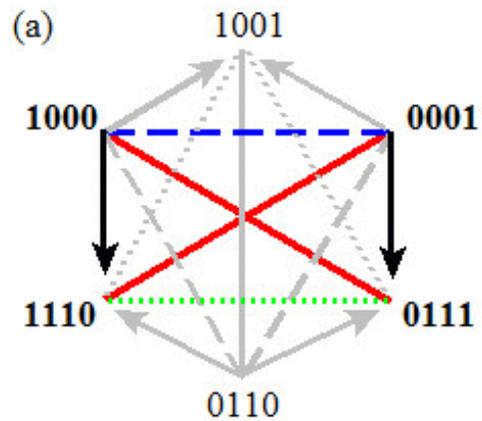
3 PCD/C



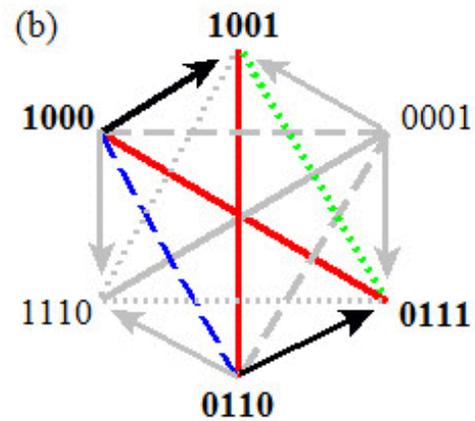
Sherwood-Czezowski

2 PCD/C + 1 PCD/O

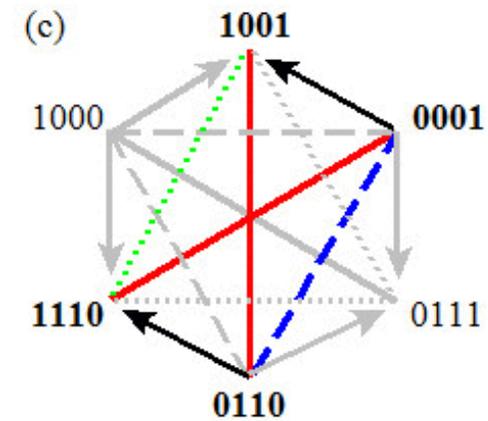
Les carrés dans les hexagones Sesmat-Blanché fort versus faible



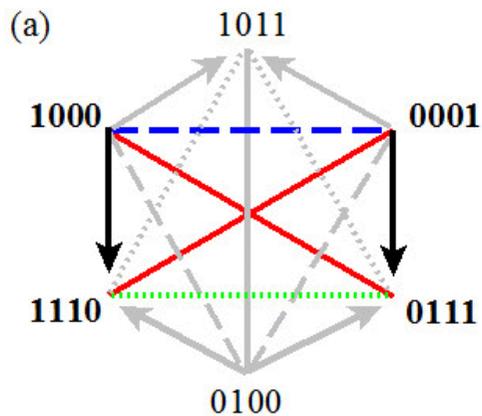
classique balancé



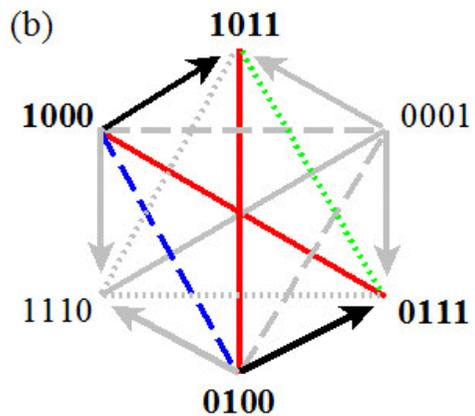
classique non-balancé



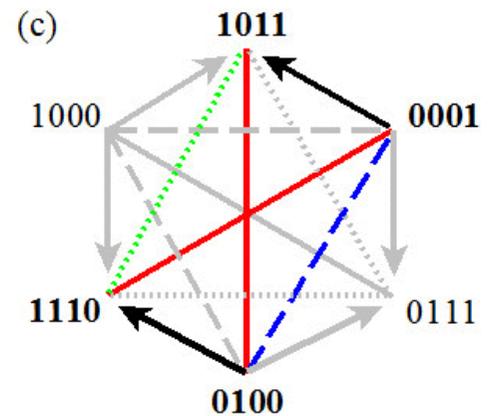
classique non-balancé



classique balancé

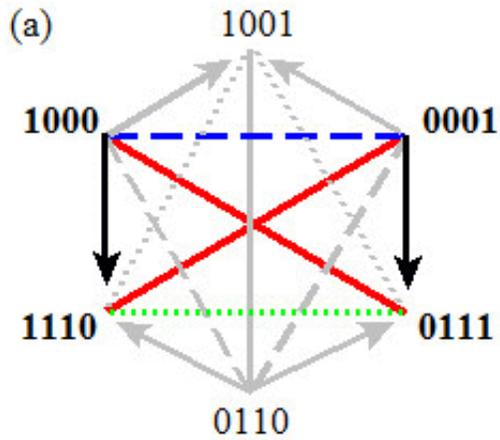


classique balancé

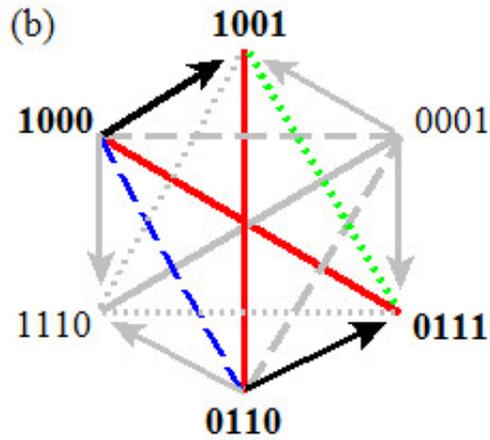


classique balancé

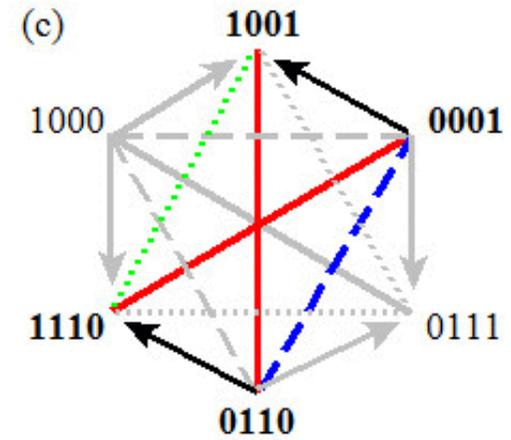
Les carrés dans les hexagones Sesmat-Blanché vs Sherwood-Czezowski



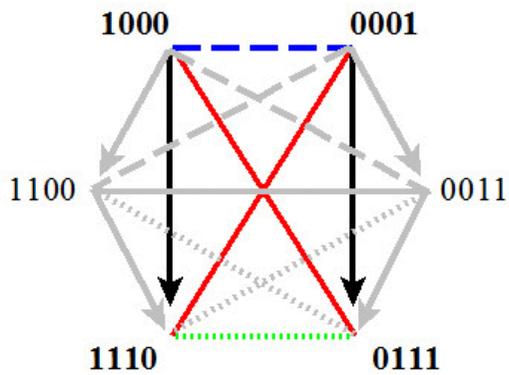
classique balancé



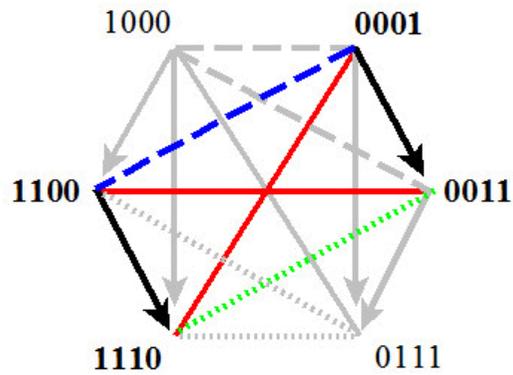
classique non-balancé



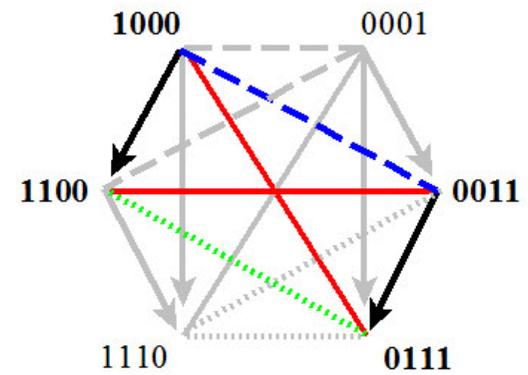
classique non-balancé



classique balancé

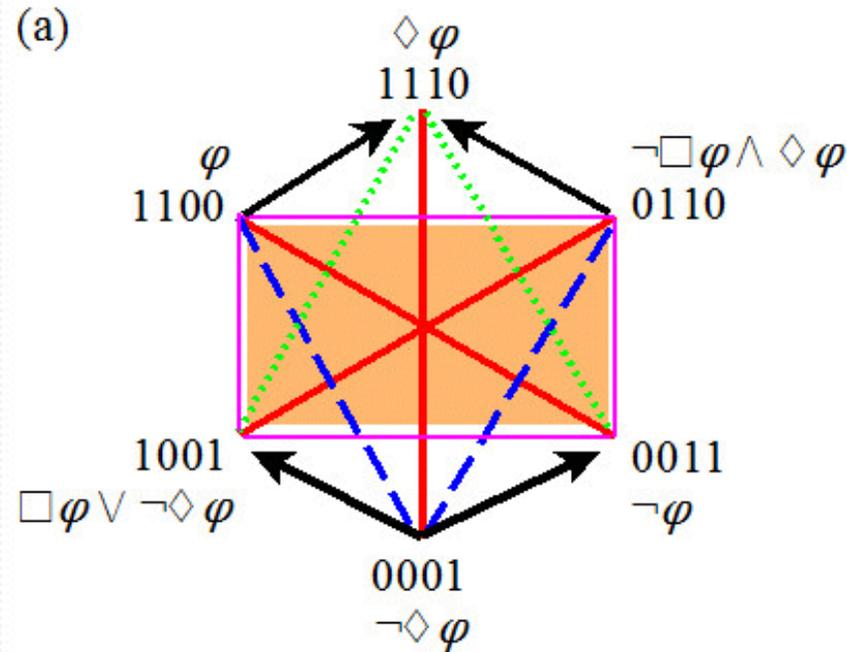


classique non-balancé

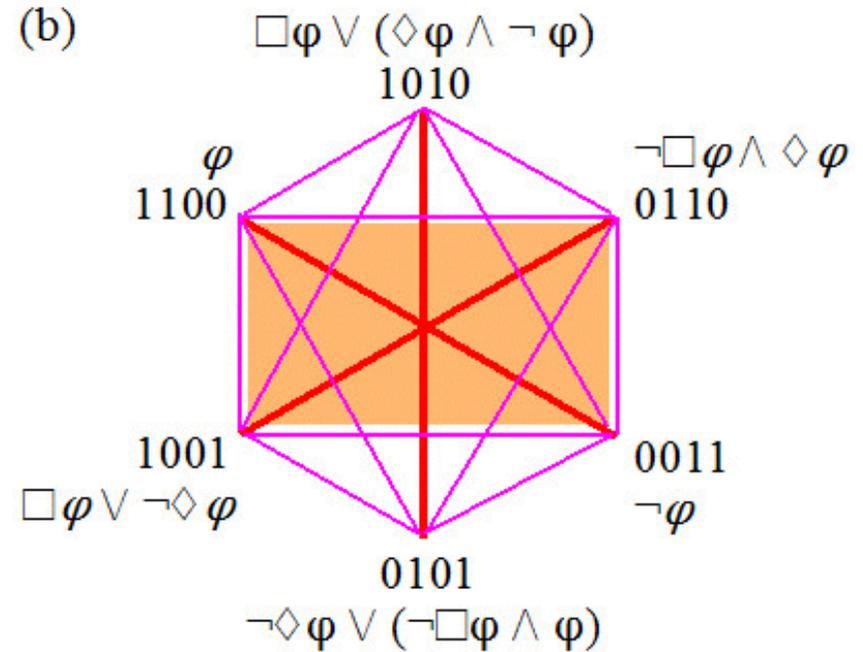


classique non-balancé

3.2 Les hexagones (partiellement) dégénérés

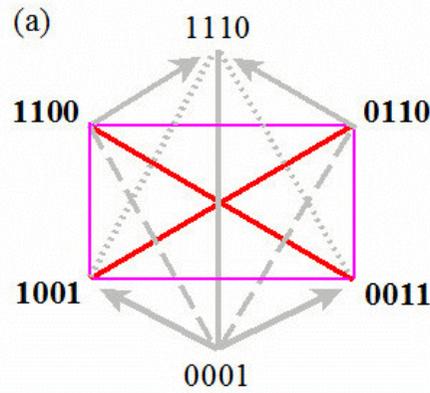


1 PCD/C + 2 PCD/O
 Unconnected4 (U4)

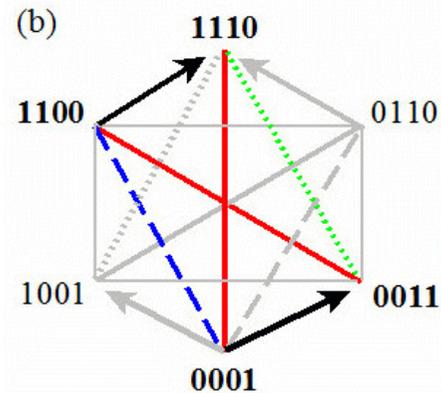


3 PCD/O
 Unconnected12 (U12)

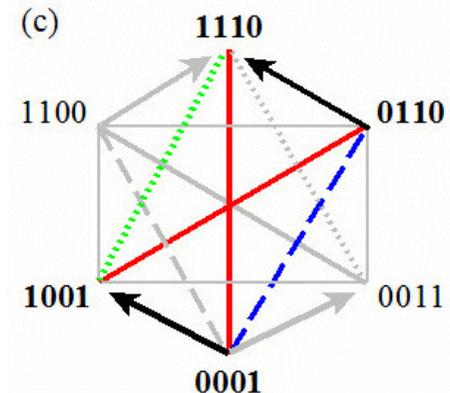
Les carrés dans les hexagones (partiellement) dégénérés



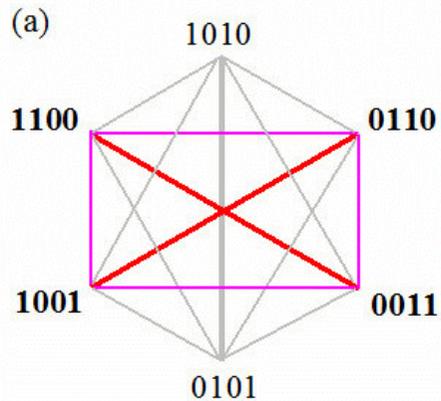
dégénéré balancé



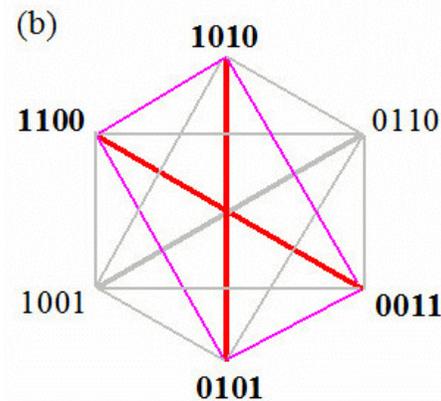
classique non-balancé



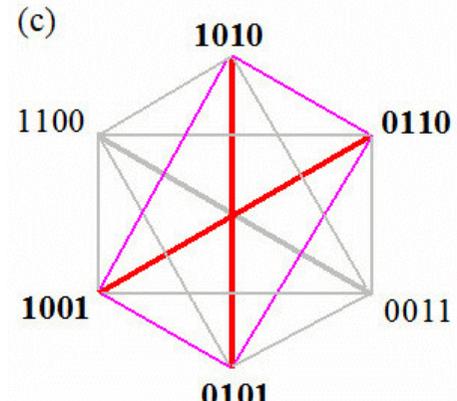
classique non-balancé



dégénéré balancé



dégénéré balancé



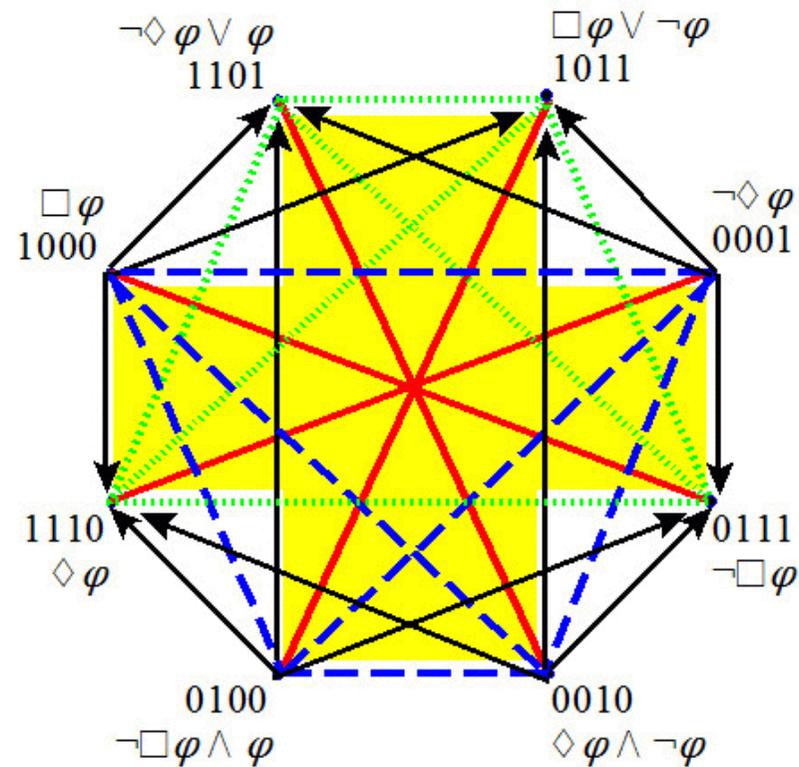
dégénéré balancé

3.3 Tableau sommaire des hexagones

HEXAGON	carré classique balancé	carré classique non-balancé	carré dégénéré balancé
Sesmat-Blanché faible	3	0	0
Sesmat-Blanché fort	1	2	0
Sherwood-Czezowski	1	2	0
Unconnected4	0	2	1
Unconnected12	0	0	3

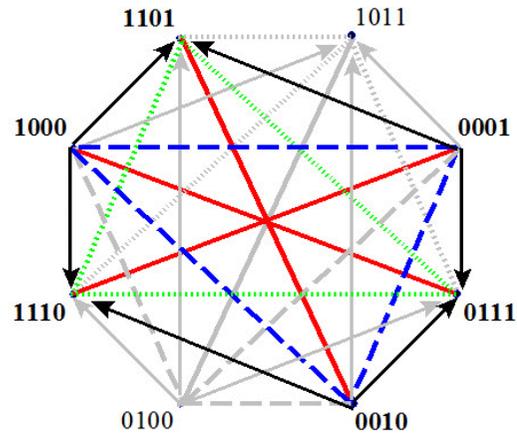
4. Les octogones Aristotéliens des Oppositions

4.1 L'octogone de Moretti-Pellissier

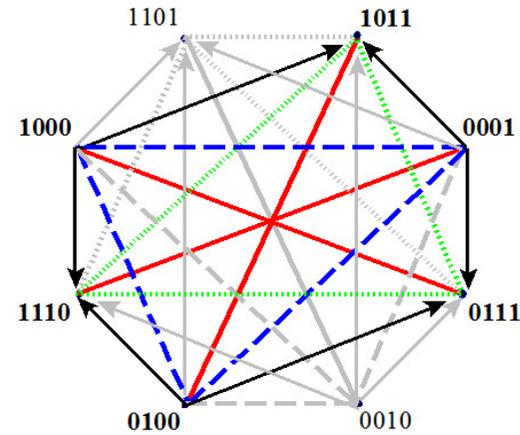


4 PCD/C

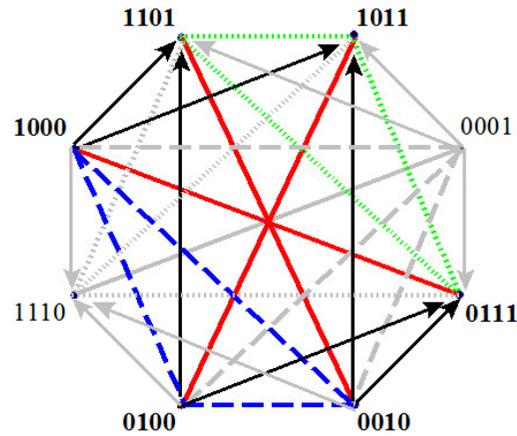
Les hexagones dans l'octogone de Moretti-Pellissier



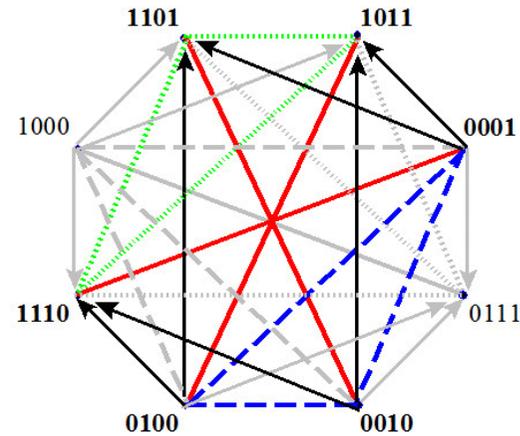
Sesmat-Blanché faible



Sesmat-Blanché faible

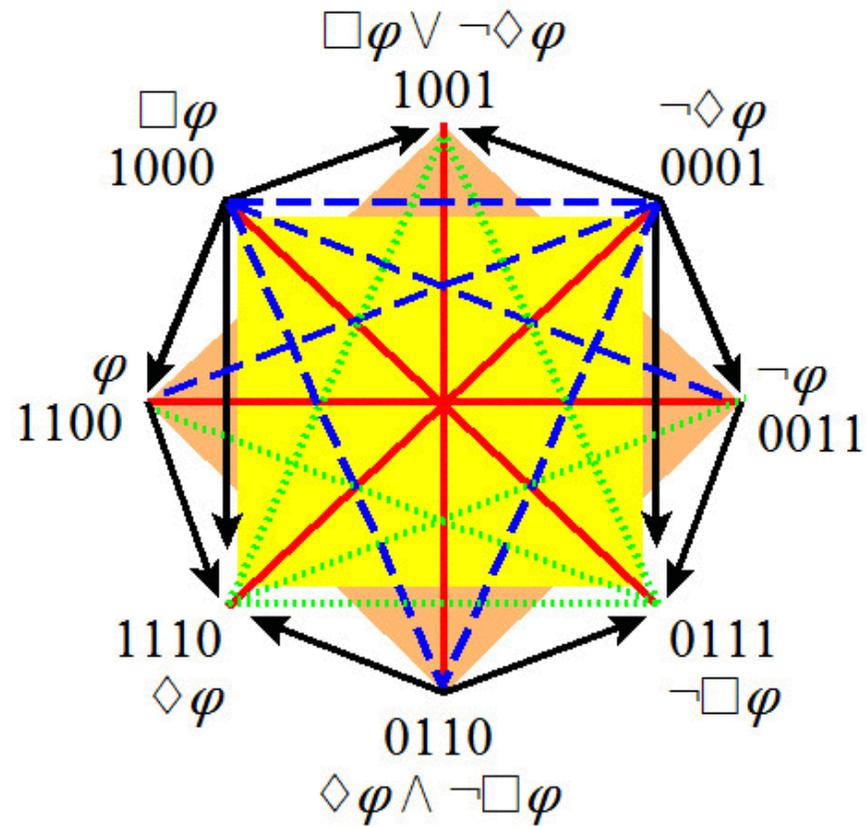


Sesmat-Blanché faible



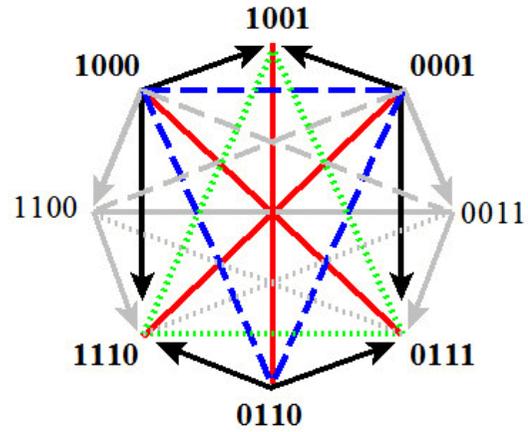
Sesmat-Blanché faible

4.2 L'octogone de Béziau

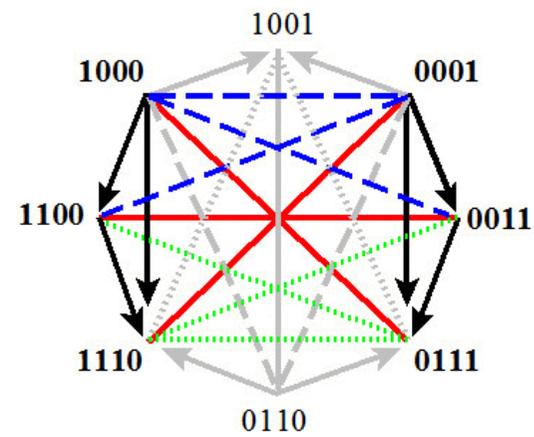


2 PCD/C + 2 PCD/O

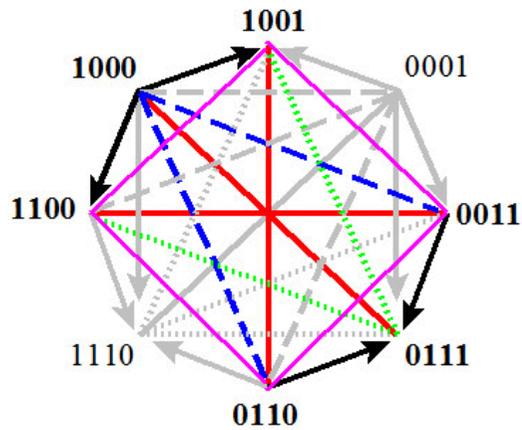
Les hexagones dans l'octogone de Béziau



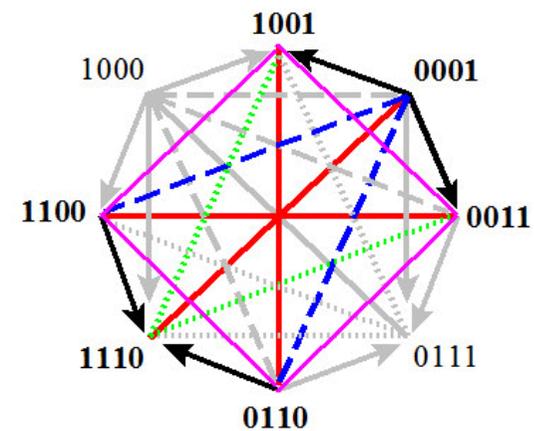
Sesmat-Blanché fort



Sherwood-Czezowski

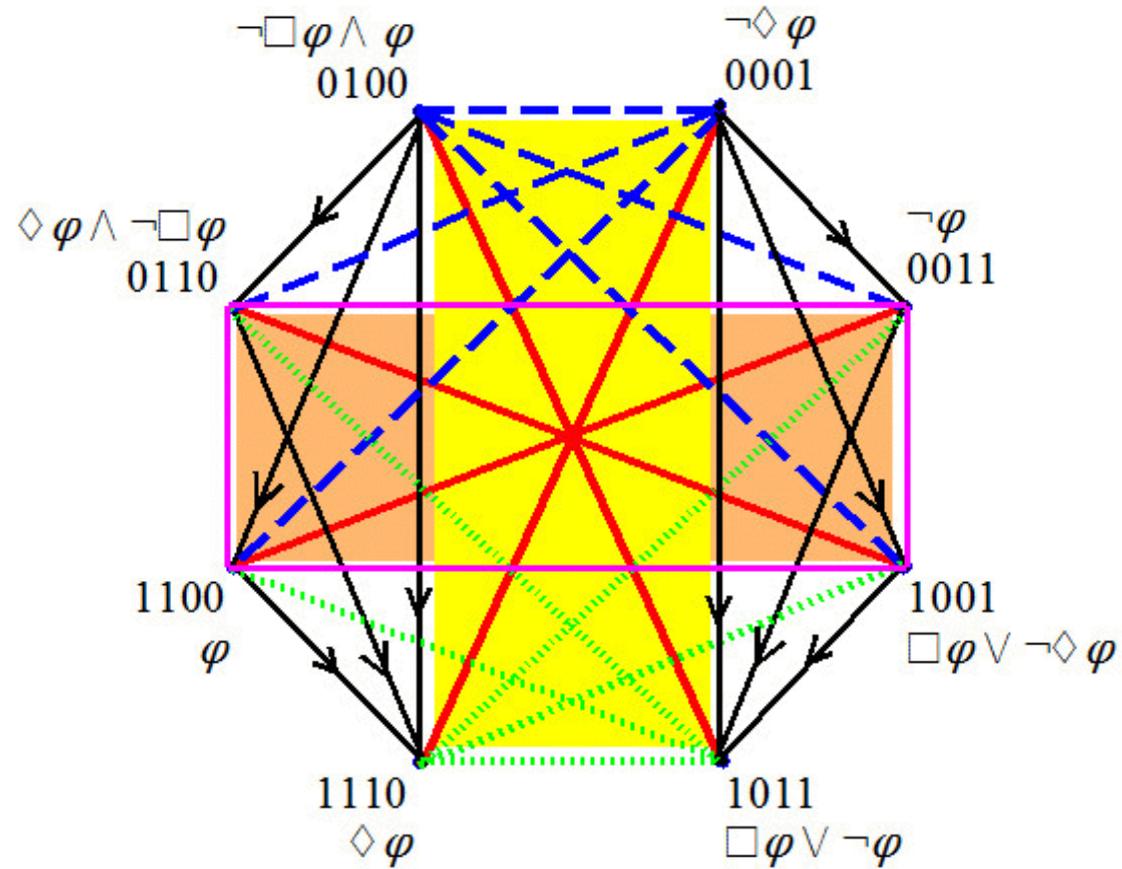


Unconnected 4



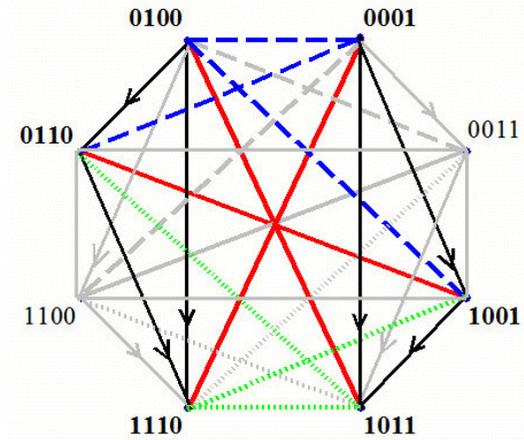
Unconnected 4

4.3 L'octogone de Buridan

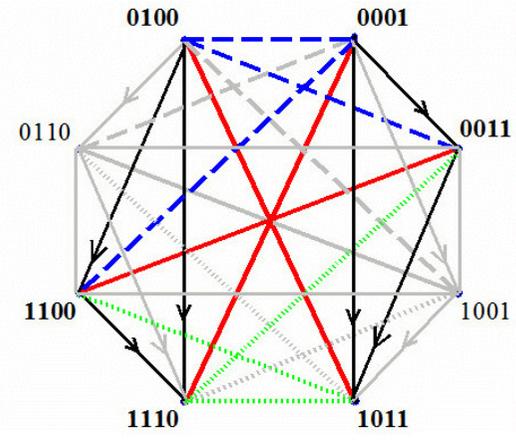


2 PCD/C + 2 PCD/O

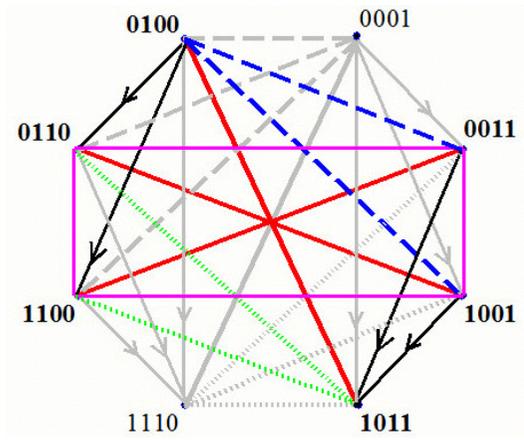
Les hexagones dans l'octogone de Buridan



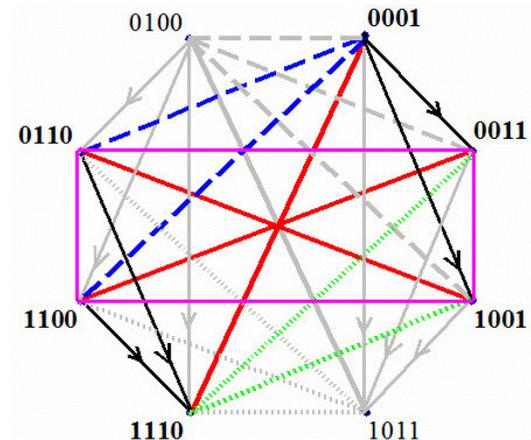
Sherwood-Czezowski



Sherwood-Czezowski



Unconnected 4



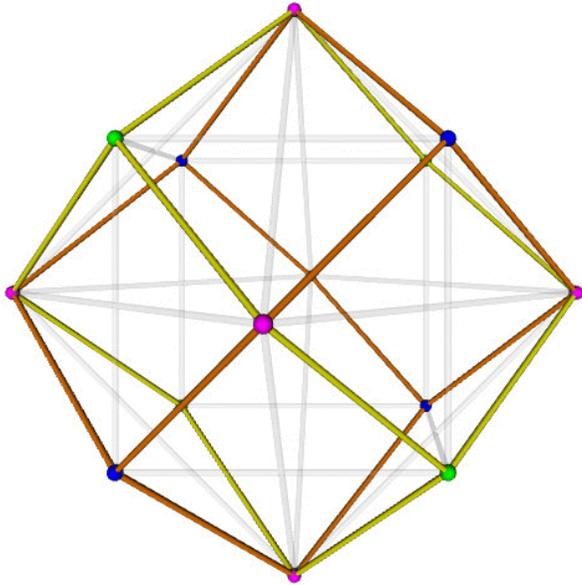
Unconnected 4

4.4 Tableau sommaire des octogones

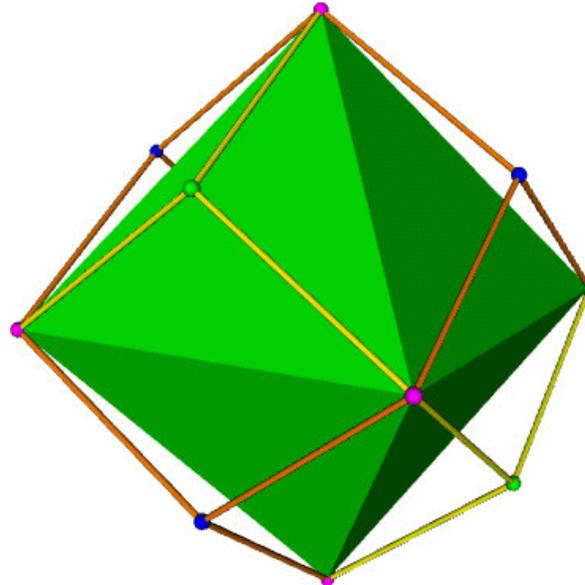
OCTOGONES	Sesmat- Blanché fort	Sesmat- Blanché faible	Sherwood- Czezowski	Uncon- nected 4
Moretti-Pellissier	0	4	0	0
Béziau	1	0	1	2
Buridan	0	0	2	2

5. Représentation visuelle à trois dimensions

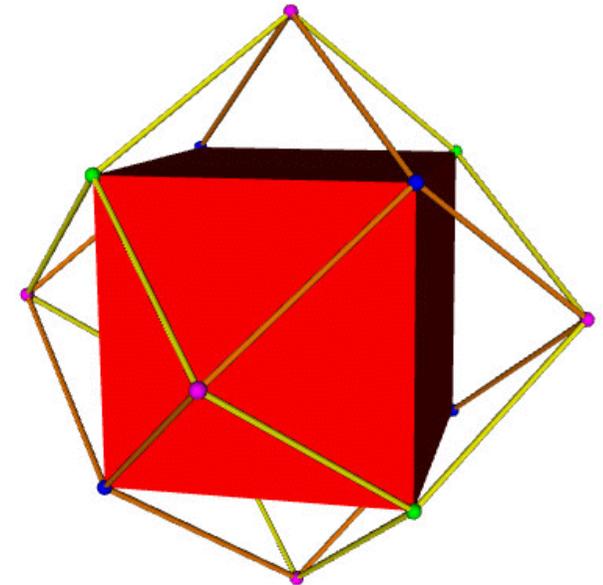
5.1 Le dodécaèdre rhombique des oppositions



dodécaèdre rhombique
 $14V + 12F - 2 = 24E$

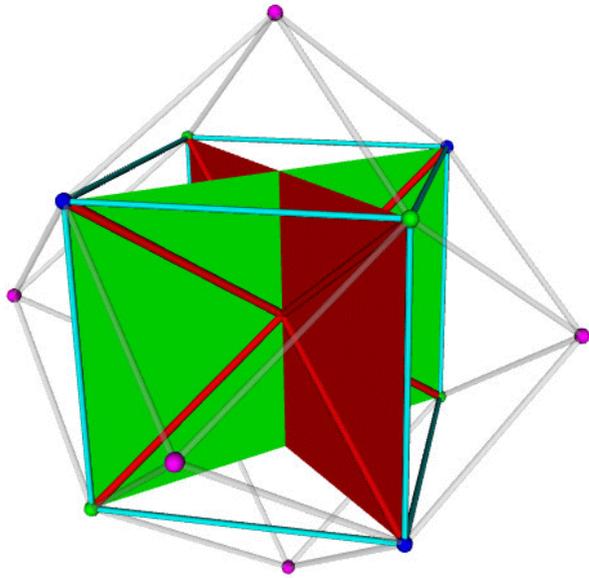


octaèdre
 $6V + 8F - 2 = 12E$
Unconnected 12

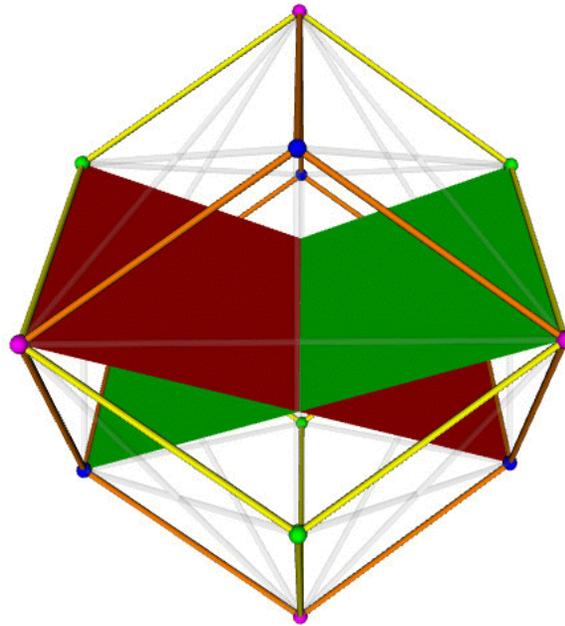


cube (hexaèdre)
 $8V + 6F - 2 = 12E$
Moretti-Pellissier

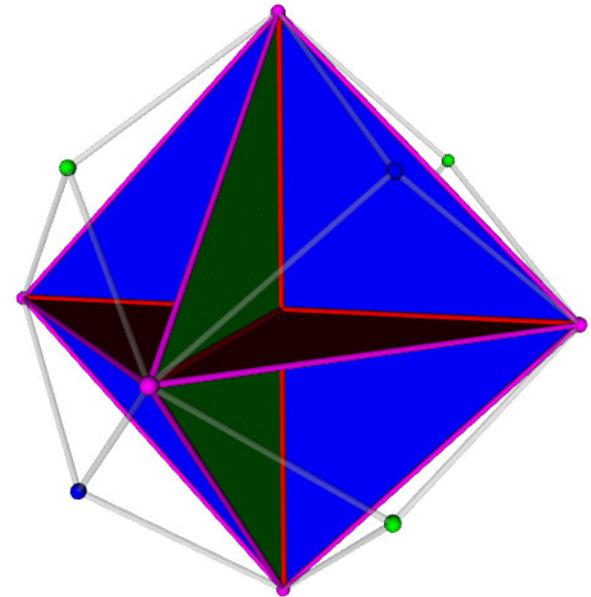
5.2 Les carrés Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique



carré classique
balancé
2 PCD/C

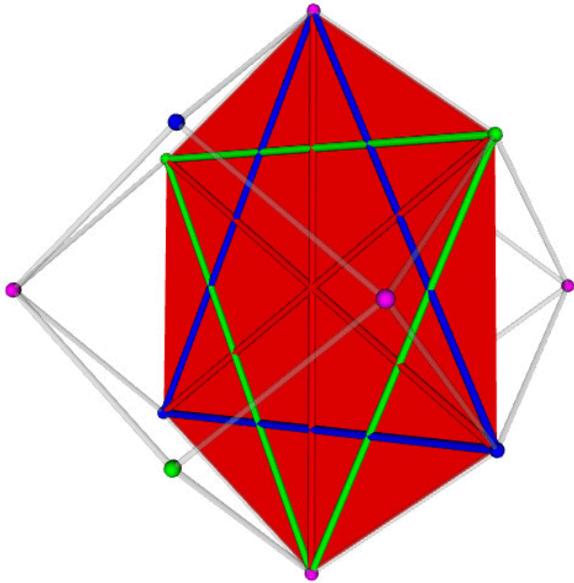


carré classique
non-balancé
1 PCD/C + 1 PCD/O

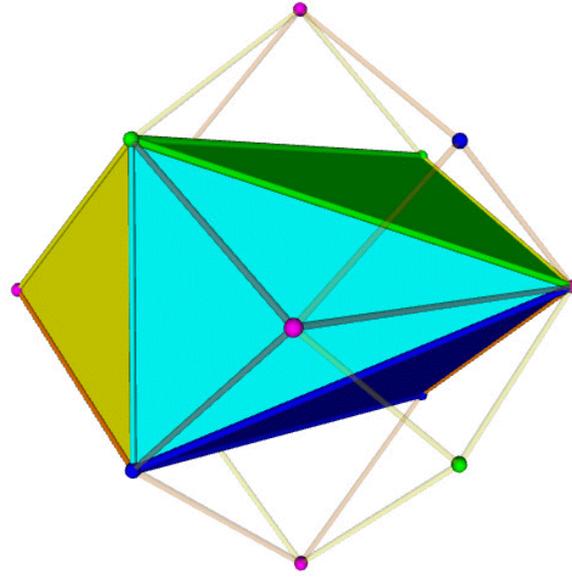


carré dégénéré
balancé
2 PCD/O

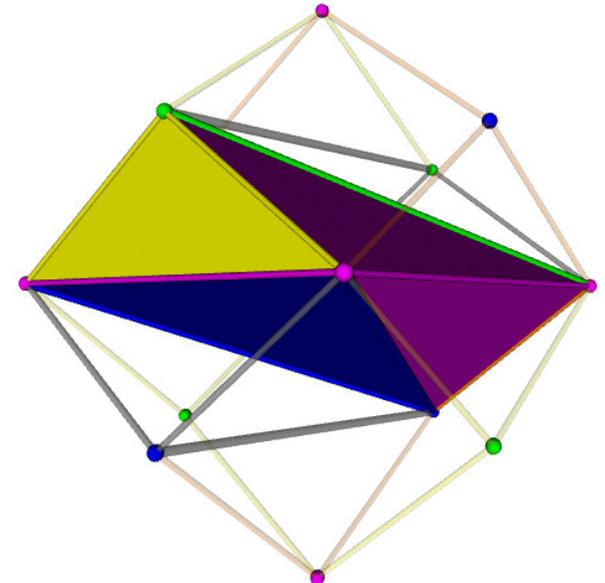
5.3 Les hexagones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique



Sesmat-Blanché fort
2 PCD/C + 1 PCD/O
plane hexagonale

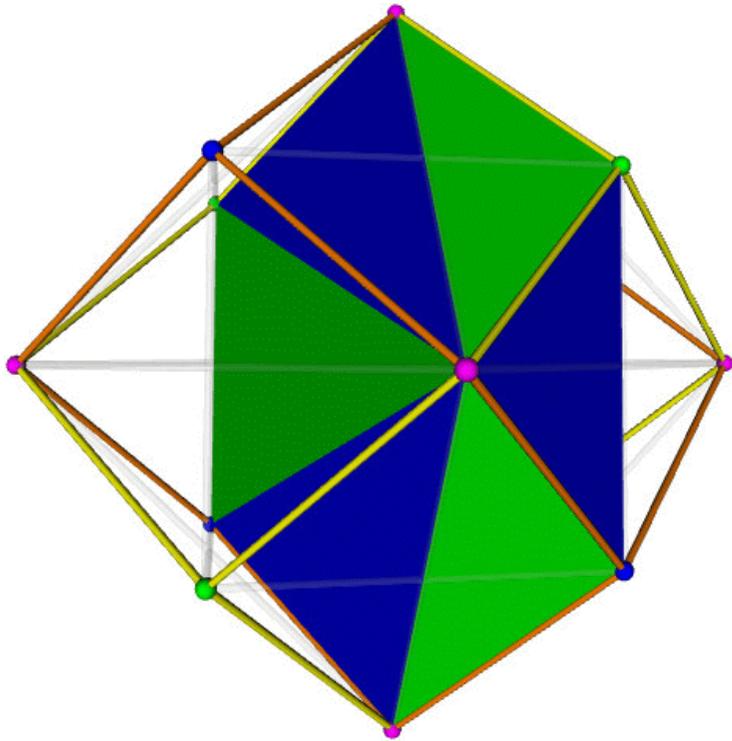


Sherwood-Czezowski
2 PCD/C + 1 PCD/O
octaèdre tordu



Unconnected4 (U4)
1 PCD/C + 2 PCD/O
octaèdre tordu

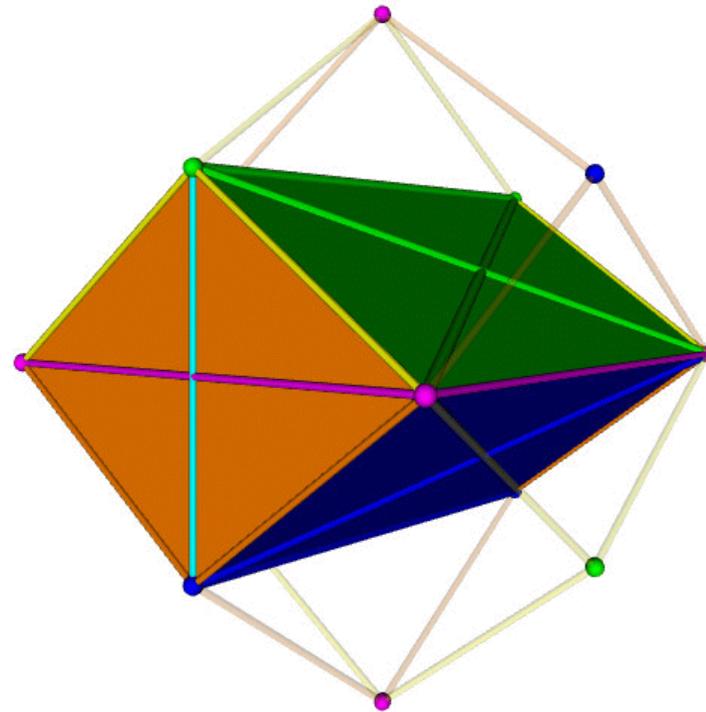
5.4 Les octogones Aristotéliens dans le dodécaèdre rhombique



Béziau

2 PCD/C + 2 PCD/O

bipyramide hexagonal tordu

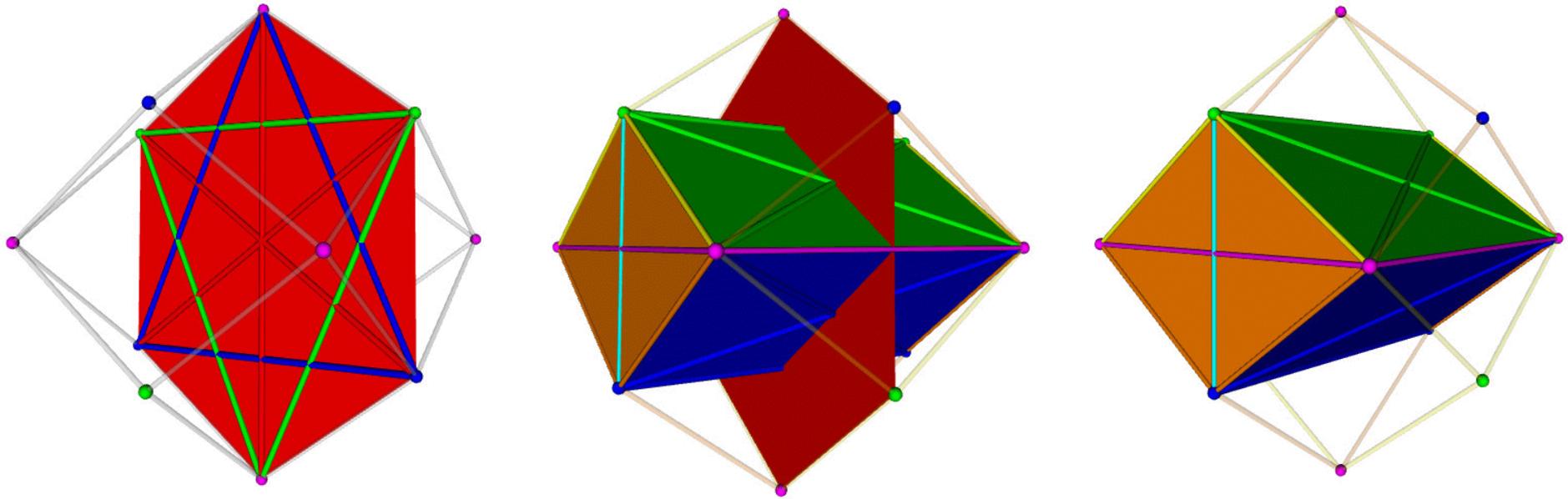


Buridan

2 PCD/C + 2 PCD/O

RHOMBICUBE

5.5 La complémentarité entre l'hexagone SB fort et le rhombicube



dodécaèdre rhombique =

1 hexagone Sesmat-Blanché fort +

1 rhombicube

1 hexagone Sesmat-Blanché fort + 2 hexagones Sherwood-Czezowski

1 hexagone Sesmat-Blanché fort + 2 hexagones Unconnected4

6. Conclusions et perspectives

énumération exhaustive/combinatoire:

=> combien de familles ? carrés (3)
hexagones (5)
octogones (5)

=> combien de membres dans chaque famille ?
carrés ($3 + 6 + 12 = 21$)
hexagones ($1 + 4 + 6 + 12 + 12 = 35$)
octogones ($1 + 4 + 6 + 12 + 12 = 35$)

=> combien de diagrammes inscrits dans le dodécaèdre rhombique ?
 $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128$

Références

- Béziau, J.Y.: New light on the square of oppositions and its nameless corner. *Logical Investigations* 10, 218–232 (2003).
- Blanché, R.: *Structures Intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts*. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris (1969).
- Chatti, S. & Schang, F.: The Cube, the Square and the Problem of Existential Import, *History and Philosophy of Logic*, 34:2, 101-132 (2013).
- Czezowski, T.: On certain peculiarities of singular propositions. *Mind* 64(255), 392–395 (1955).
- Demey, L.: Structures of Oppositions in Public Announcement Logic. In: Béziau, J.Y., Jacquette, D. (eds.) *Around and Beyond the Square of Opposition*. Springer, Basel (2012).
- Khomskii, Y.: William of Sherwood, singular propositions and the hexagon of opposition. In: Béziau, J.Y., Payette, G. (eds.) *New Perspectives on the Square of Opposition*. Peter Lang, Bern (2011).
- Kretzmann, N.: *William of Sherwood's Introduction to Logic*. Minnesota Archive Editions, Minneapolis (1966).
- Moretti, A.: *The Geometry of Logical Opposition*. Ph.D. thesis, University of Neuchâtel (2009).
- Moretti, A.: Why the Logical Hexagon? *Logica Universalis* 6, 69–107 (2012).
- Pellissier, R.: Setting n-opposition. *Logica Universalis* 2(2), 235–263 (2008).
- Sauriol, P.: Remarques sur la théorie de l'hexagone logique de Blanché. *Dialogue* 7, 374–390 (1968).

- Sesmat, A.: *Logique II. Les Raisonnements*. Hermann, Paris (1951)..
- Smessaert, H.: On the 3D visualisation of logical relations. *Logica Universalis* 3(2), 303–332 (2009).
- Smessaert, H.: The Classical Aristotelian hexagon versus the Modern Duality hexagon. *Logica Universalis* 6/1, 171-199 (2012).
- Smessaert, H.: Boolean differences between two hexagonal extensions of the logical Square of Oppositions. In Philip Cox, Beryl Plimmer and Peter Rodgers (eds.) *Diagrammatic Representation and Inference*. Lecture Notes in Artificial Intelligence 7352. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, pp. 193-199 (2012).

Hans Smessaert
KU Leuven, Belgique
Département de Linguistique
Groupe de Recherche en Linguistique Formelle et Computationnelle
Hans.Smessaert@arts.kuleuven.be
<http://wwwling.arts.kuleuven.be/nedling/hsmessaert/>